**5-2 球体的刚度** 2020年7月7日09点53分——2020年11月17日12点02分

**定理1** 令为具有恒定高斯曲率的紧致规则曲面.则一定为球体.(**证明过程需要理解**)

**引理1** 令为规则曲面,为满足以下条件的S点: (**证明过程需要理解**)

1. ;也就是说,中的高斯曲率是正的.
2. 同时是函数的局部最大值点和函数的局部最小值点.

那么是的脐点.

**引理2** 一个规则紧致曲面至少有一个椭圆点. (**证明过程需要理解**)

**定理1a** 令为规则的,紧致且连通的曲面,并且高斯曲率以及平均曲率恒定.那么是一个球体.

**定理1b** 令为规则的,紧致且连通的表面,并且高斯曲率为正,如果在中存在关系,其中是的递减函数,,则S是一个球体.

高斯曲率的中的紧密连接表面称为椭圆形.因此,定理1a可以表示如下:具有恒定平均曲率的椭圆形是一个球体.

**5-3 完整表面.霍普夫-里诺定理** 2020年7月8日09点49分

除非另有说明,否则从现在开始要考虑的所有表面将是规则且连通的.

**定义1** 如果存在规则的(连接)表面,使得作为适当的子集,则称规则(连接)表面S是可**扩展的**.如果不存在这样的,则称S是**不可扩展的**.

**定义2** 对于每个点,S上的任意参数化测地线,从开始可以扩展到在R上定义的参数化测地线时,规则表面被认为是**完整的**.

换句话说,对每一个点,映射对每一个都支持,则是**完整的**.

稍后我们将证明(命题1)每个完整的曲面都是不可扩展的,并且存在不完整的不可扩展曲面(示例1).因此,完整性的假设比不可扩展的假设更强.此外,我们将证明(命题5)中的每个闭合表面都是完整的.也就是说,完整性的假设比紧凑性的假设要弱.

本部分的目的是证明给定完整表面的两个点,存在一个连接和测地线(即长度小于或等于任意其它连接和曲线的长度).这一基本结果首先由霍普夫和里诺（H. Hopf，W. Rinow，“Überden Begriff dervollständigendiffereogeometriscbenFlächen”，Comm。Math。Helv。3（1931），209-225）证明.这个定理是为什么完整的曲面比不可扩展的曲面更适合微分几何的主要原因.

现在让我们来看一些示例.该平面显然是完整的表面.圆锥减去顶点是不完整的曲面,因为通过充分扩展生成器(测地线),我们可以到达不属于曲面的顶点.球是完整的曲面,因为可以为每个实际值定义其参数化的测地线(其迹线是球的大圆).圆柱体也是完整的曲面，因为其测地线是为所有实数值定义的圆,线和螺旋.

另一方面,通过从完整曲面去除点而获得的曲面是不完整的.实际上,的测地线应该经过.通过取点,在上的附近（图5-3），存在一个参数化的测地线,它从q开始,不能扩展到(此论据将在命题1中详细给出).因此，减去点的球体和减去点的圆柱体都不是完整的曲面.

**命题1** 完整的曲面S是不可扩展的. (**证明过程需要拓扑知识,暂时跳过**)

例题1以及后面的一段内容强依赖拓扑,暂时跳过.

对于以下内容,可以方便地引入的两个点之间的距离的概念,该距离仅取决于的固有几何形状,而不取决于浸入的方式(参见命题2,第4-2节).观察到,由于,可以将两点之间的距离定义为中这两点之间的距离.但是,该距离取决于第二种基本形式,因此,对于本章而言,该距离不是目的.

一个连续映射将直线R的闭区间映射到曲面S,且连接,该映射被称为的参数化,分段可微分曲线仅当在区间上存在点分割使得在上可微的.的长度被定义为

**命题2** 给定规则(连通)曲面的两个点,存在连接的参数化分段可微曲线.

现在让是规则曲面S的两个点.我们用表示参数化的分段可微分曲线,将p连接到q，并用表示其长度.命题2表明所有这些的集合都不为空.因此,我们可以设置以下内容:

**定义3** 从点到点的(固有)距离为

其中表示在所有连接和的分段微分曲线上取值.

**命题3** 上面定义的距离具有以下属性,

1. ,
2. ,
3. ,
4. 当且仅当,

其中是S上任意点.

**推论** .

这足以观察到

因此,

**命题4** 设为S的一个点,则由给出的函数在S上是连续的.

**命题5** 闭合曲面是完整的.

**推论** 紧凑曲面是完整的.

**定理1** 令S为完整表面.给定两个点,存在一个最小测地线连接和.

**推论1** 令S为完整表面.则对于每个点映射在S上.

**推论2** 令S为完整表面且以度量为界(即,存在0使得对于每一对,).那么是紧凑的.

初次学习得分:1分

**5-4 弧长的第一和第二变化: 邦内定理** 2020年7月14日10点00分——2020年11月18日13点02分

本部分的目的是证明高斯曲率的完整表面S是紧密的(Bonnet定理).

证明的关键点在于,如果,则连接两个任意点且长度的测地线不再最小;也就是说.存在一条连接和的参数化曲线,其长度小于.

一旦证明,则每个最小测地线的长度;因此,以距离为界.由于是完整的,因此是紧凑的(推论2,第5-3节).我们注意到,此外,我们获得了直径的估计值,即.

为了证明上述观点,我们需要将参数化曲线的弧长与“相邻曲线”的弧长进行比较.为此,我们将介绍一些对其他微分几何问题有用的想法.实际上,这些想法是对微分学中发现的更一般概念的微分几何目的的适应.不会假设有微积分的知识.

**定义1** 令为规则参数化曲线,其中参数为弧长.的变化是可微映射使得

对于每个,由定义的曲线称为**变化**的曲线.如果变化被认为是**适当的**仅当

采用以下表示法很方便.中的参数化曲线由

给出并穿过点并在具有和作为切向量.设是可微映射,设.则是曲线在处的切向量,而是曲线在的切向量.我们将表示

我们回顾(参见第4-4节,定义3)沿着曲线的向量场是对应于为每一个赋予曲面S在的切向量.因此,和是沿着的可微切向量场.(**这段内容需要结合方向导数的定义来理解**)

因此,的变化决定了沿的可微向量场

称为的变分矢量场;我们指出如果是适当的,则

**命题1** 令是沿着参数化规则曲线的可微向量场,则存在的变化使得是的变分矢量场.此外,如果,则可以适当选择.

我们要比较弧长和,我们定义一个函数

**引理1** 由等式定义的函数在附近是可微的;在这样的邻域中,的导数可以通过积分符号下的微分获得.即

**引理2** 令为沿参数化曲线的可微向量场,令为可微分函数.则

**引理3** 令和为沿着参数化曲线的可微向量场.则

**引理4** 令是可微映射.则

**命题2** 令是曲线的**适当变化**,令是的变分矢量场,则

其中.

备注1. 向量称为曲线的**加速度向量**,其范数不过是的测地曲率的绝对值.观察到仅取决于变化场,而不取决于变化本身.通常将表达式称为曲线弧长的**第一变化**公式.

备注2. 仅在证明的末尾使用合适的条件以消除这些项

因此,如果不适当,我们将获得一个类似于公式(2)的公式,其中包含这些附加的边界项.

**命题3** 规则参数曲线(其中参数是的弧长)是一个测地线当且仅当对于每一个适当变化,均使得.

从现在开始,我们将仅考虑由弧长参数化的测地线的适当变化;也就是说,我们假设.为简化计算,我们将自己限制在**正交变化**范围内;即,我们假设变化场满足条件.为了研究函数在0附近的行为,我们将计算.

**引理5** 令是规则曲面上点的参数化,参数为,并且为的高斯曲率.则

**引理6** 令是一个可微映射并且令是沿着的可微分向量场.则

其中是在点的曲率.

**命题4** 令是测地线(其中参数是的弧长)的适当正交变化.令是的变分矢量场.则

其中是在点的高斯曲率.

**定理1(邦尼)** 令完整曲面S的高斯曲率满足条件

那么S是紧致的并且的直径满足不等式

本节内容初学评分:3分

**5-5 雅可比场和共轭点** 2020年7月15日09点47分

在本节中，我们将探讨用于证明Bonnet定理的变分技术的一些细节.

我们感兴趣的是获得关于给定测地线附近的测地线行为的信息.一种自然而然的处理方法是考虑满足进一步条件的变化，该变化的曲线本身就是测地线.这种变化的变化场给出了测地线在附近的分布密度的想法.

为了简化说明，我们将假定表面是完整的，尽管在以后的工作中可能会舍弃该假设.表示通过完整表面上的弧长参数化的测地线.

**定义1** 设是上的参数化测地线,设是的变体,使得对于每个,曲线是参数化的测地线(不一定通过弧长参数化).沿的变化场称为**雅可比场**.

测地线的切向量场给出了Jacobi场的一个简单例子.实际上,通过取,我们有

**命题1** 令为沿的雅可比场.则满足所谓的雅可比方程

其中是在处的高斯曲率.

为了从命题1中得出一些结果,将Jacobi方程(1)放在更熟悉的形式中很方便.为此,令和为切平面中的单位正交向量,令和分别为沿着的和的平行传输.

假如

对某些函数.然后,通过使用上一节的引理2并省略,以简化符号,我们获得

另一方面,如果我们写

我们有

因此,令,我们得到

从而公式(1)可以写为

其中所有元素都是的函数.注意,是一个线性二阶微分方程组.针对每个定义这样一个系统的解并构成一个向量空间.此外,(或(1）)的解完全由初始条件确定,并且解的空间为2×2 = 4个维度.

可以看出,满足等式(1)的沿测地线的每个向量场实际上都是Jacobi场.由于我们仅对满足条件的Jacobi场感兴趣，因此我们仅针对该特定情况证明命题。

我们将使用以下表示法.令,为点处的切平面,并用表示在处的切线空间.由于,

我们经常会出现以下符号上的滥用:如果,则也表示通过向量的平移从获得的的向量(见图5-16).这等效于通过向量的平移来标识空间和.

**引理1** 令并选择,其中.设为的测地线,由

给出.则沿着给出的向量场

是一个雅可比场.此外,.

**命题2** 令为沿的可微向量场,满足雅可比方程(1),且,则是沿的雅可比场.

**定义2** 设是的测地线，.如果存在一个沿着的雅可比场,但是沿整个并不全为0,则我们称点相对于**测地线**与**共轭**.

沿着的Jacobi场的有用性质是:当时,

**命题3** 令和是沿着的雅可比场.则

令是沿着的雅可比场,且

则

**推论** 令是沿着的雅可比场,且.则.

**命题5** 令是S上的两个点,并且令是连接和的测地线.则是相对于与p共轭当且仅当是的关键点.

**定理1** 假设曲面的高斯曲率K满足条件.那么,对于每个,的共轭轨迹为空.简而言之，曲率的表面没有共轭点.

**推论** 假设S的高斯曲率为负或零.然后对于每个,映射是一个局部微分同构.

**引理2(高斯)** 令为(完整)曲面S的点,令和.则

其中应用了.

本节内容初学评分:3分

**5-6 覆盖空间;哈达玛定理** 2020年11月24日09点36分

我们在最后一节中看到,当完整曲面的曲率满足条件时,映射是局部微分.很自然地问这种局部微分形何时是全局微分形.将这个问题放在更笼统的环境中是很方便的,我们需要覆盖空间的概念.

**A.覆盖空间**

**定义1** 令和为的子集.我们说是**覆盖映射[covering map]**仅当

1.是连续的且.

2.每个点在中都有一个邻域(称为p的一个专有邻域),使得

其中是成对的不相交的开集使得对的限制是到的同胚.

则被称为的**覆盖空间[covering space]**.

现在，我们可以用以下更一般的形式来重新描述在本节开头提出的问题：

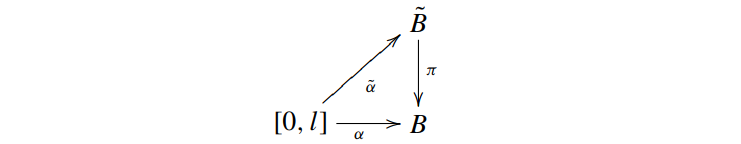
1. 在什么条件下局部同胚是全局同胚？
2. 在什么条件下局部同胚是覆盖映射？
3. 在什么条件下覆盖映射是全局同胚？

**命题1** 令是局部同胚,紧凑且连通.则是一个覆盖映射.(**证明过程需要拓扑知识,因此跳过**)

当不紧凑时,很少有有用的标准来断言局部同胚性是一个覆盖映射.特殊情况将在以后处理.对于这种特殊情况以及对问题2的处理,我们需要回到覆盖空间.

令.回想一下连续映射称为的弧(请参见第5章,附录8).现在,令和为的子集.令为连续映射,为的弧.如果存在的弧,

其中,被认为是起源于的的**提升[lifting]**.在附图中描述了这种情况.



**命题2** 令为覆盖映射,为中的弧,是的一个点,使得.则存在一个唯一的提升,其原点为,即.(**证明过程需要拓扑知识,因此跳过**)

覆盖映射的弧提升特性的有趣结果是:当弧形连接时,在集合和之间存在一一对应的事实,其中和是的两个任意点.实际上,如果弧形连接,则存在一个弧,其中和.对于每一个,存在一个提升,其中.现在通过定义;也就是说,令以为原点的提升的极值.根据提升的唯一性,是所主张的一对一对应关系.

由此可见,当B弧形连接时,的点的”数量”不依赖于如果该数目是有限的,则称为覆盖物的**页数[sheets of number]**.如果不是有限的,我们可以说覆盖是无限的.示例1和2是无限覆盖.可以观察到,当紧凑时,覆盖率始终是有限的.

对于问题2的处理,我们还需要做出一些直观的想法,这些想法是基于以下考虑而产生的.为了使覆盖映射同胚,只要是一对一的映射即可.因此,我们必须找到一个条件,确保当的两个点以投影到的同一点时

这意味着.我们假定是弧形连接的,并将的弧(将连接到)投影到的闭合弧,将其连接至(见图5-26).如果不具有“孔”(在某种意义上讲是精确的),则可以“将连续变形到点”.也就是说,存在弧族,它们在中连续,其中并且等于恒定弧.由于是的提升,很自然地期望弧是的提升,并且在中连续,且具有.由此可得是恒定弧的提升,因此退化为一个点.另一方面,连接,因此我们得出的结论.

**定义2** 令并使是的两个弧,将下列点连接

如果存在一个连续映射,使得

1. .
2. .

我们说和是**同伦的[homotopic]**,映射被称为和之间的同伦.

对于每个,由给出的弧称为同伦的弧.因此,同伦是一个弧族,这构成了到的连续变形(见图5-27),使得在变形过程中,弧的末端和保持固定(条件 2).

提升同伦的概念完全类似于提升弧的概念.设为连续映射,设为的两个圆弧,连接点和.令是和之间的同伦.如果存在连续映射

使得,我们说是同伦的提升,原点为.

**命题3** 设为弧形连接,设为局部同胚,且具有提升弧的性质.设为的两个弧,连接点和,令

是和之间的同伦,并且令使得.则存在一个以为原点的的唯一提升.

证明过程给出了的具体表达式:

**命题4** 令为局部同胚,且具有提升弧的性质.令是的两个圆弧并连接和,选择点使得.如果和是同伦的,则和以为原点的提升和也是同伦的.

回到促使我们考虑同构概念的启发式论点，我们看到仍然有必要解释没有“孔”的空间的含义.当然,我们将把启发式论证中所使用的属性精确地定义为这种空间.

**定义3** 令集合是弧连通,给定两个点和连接和的两个弧线,如果和之间存在一个同伦,我们称集合是**简单连通的**.特别的,B中任意闭合弧线

(闭合意味着)与“常量”弧线同伦.

**命题5** 令是具有提升弧的性质的局部同胚.令为弧连通,而简单地连通.则是同胚的.(证明过程已看懂)

**推论** 令为覆盖映射,令为弧连通,而简单地连通.则是同胚的.

我们证明命题3,4和5具有比严格必要性更广泛的事实,这将使我们对问题1给出另一个答案,如下所述.

令是具有提升弧的特性的局部同胚,并假定和是局部的“行为良好”(精确地说).那么,实际上就是一个覆盖映射.

所需的局部属性描述如下.回想一下,如果每个点的任何邻域都包含一个弧连通的邻域,则B⊂R3是局部弧形连接的(第5章,定义12的附录).

**定义4** 如果每个点的任何邻域包含一个简单连通邻域,则是**局部简单连通**.

换句话说,如果每个点具有任意小的简单连通邻域,则是局部简单连通.显然,如果是局部简单连通,那么也是局部弧连通.

我们注意到,由于具有任意小的与平面内的磁盘内部同胚的邻域，因此规则表面是局部简单连通.

在下一个命题中,我们将需要局部弧连通的集合的以下属性(请参阅D部分第5章的附录).包含点的的所有弧连通子集的并集显然是一个弧连通集合,称为包含的的**弧连通分量**.因为是局部弧连通的,所以在中是开放的.因此,可以写成其连通分量的并集,它们是开集且任意两个不相交.

我们还注意到规则曲面是局部弧连通,在下面的命题中,当和均为规则曲面时,满足和的假设.

**命题6** 令是具有提升弧的性质的局部同胚.假设是局部简单连通并且是局部弧连通. 则是一个覆盖映射.(**证明过程需要看懂**)

**B. 哈达玛定理**

**引理1** 令为曲率的完整曲面.则,在以下意义上长度增加:如果,我们有

其中,表示通过平移得到的中的向量.

**推论** 令.则是局部等距.

**命题7** 令为高斯曲率的完整曲面.则映射是覆盖映射.

**定理1(Hadamard)** 令为简单连通的,具有高斯曲率的完整表面.则是微分同胚的;也就是说,微分同胚于平面.

**定理2(Hadamard)** 令为椭圆形.则高斯映射是微分同构的.特别地,微分同胚于球面.

本节内容初学评分:3分

**5-7 曲线整体定理:Fary-Milnor定理** 2020年12月2日10点17分

令,令为的覆盖,其表达式为

令为连续映射.的**度[degree]**定义如下.我们可以认为映射中的第一个是一个封闭的区间,标识了端点和.因此,可以将视为连续映射,其中.因此,是中处的闭合弧,根据5-6节命题2,可以被提升为唯一的弧,从点开始,.由于,所以差是的整数倍.整数由

给定,被称为的**度**.

直观地,是乘积次数使得环绕“包裹”(图5-30).注意函数是对固定矢量ϕ（0）-O与with（t）-O的正角的连续确定，t∈[0，l），O =（0，0）-例如，映射π：S1→S1在Sec的示例4中描述。 A部分5-6的度数为k。

我们必须证明度数的定义与和的选择无关.

首先,与的选择无关.实际上,令是中的一个点,使得,令.由于是的整数倍,所以是从开始的的提升.根据5-6节命题2的唯一性部分,是从开始的的提升.由于

因此的度无论是用还是计算都相同.

其次,与的选择无关.实际上,除的对映点[antipodal]外,每个点都属于的显着邻域.在包含的的连通分量中选择,使得,令为

从开始的提升.显然,.它是从逐步构造提升的过程得出的(参见Prop。2，S-6节的证明),.由于两个差值必须是的整数倍，因此它们的值实际上相等.通过连续性,该结论也适用于p的对映点,这证明了我们的主张.

度的最重要属性是其在同伦下的不变性.更准确地说,令为连续映射.固定一个点,从而在处获得两个闭合圆弧.如果和是同伦的,则.这是基于以下事实: (第5-6节命题4)从固定点开始的和的提升是同伦的,因此具有相同的终点.

应当指出的是,如果是可微的,它确定的可微函数,由,满足条件.在这种情况下,从开始的提升正好是微分函数(参见引理1,第4-4节).

这从提升和事实的唯一性出发,即.因此,在可微的情况下,的度可以用积分表示,

在后一种形式中,度的概念在本书中反复出现.例如,当,是向量场,而是它的唯一奇点,则在处的索引(请参阅第4-5节,应用7)可以解释为映射的度,.

在进一步研究示例之前,让我们回想一下,闭合(可微)曲线是可微映射(如果是平面曲线,则为),使得的分量以及所有导数在0和l处一致。 如果对于所有t∈[0，l]的α（t）= 0，则曲线α是规则的；如果只要t1 = t2，t1，t2∈[0，l），则α（t1），则曲线α是简单的。 =α（t2）。 有时可以方便地假定α只是连续的； 在这种情况下，我们将明确地说α是连续的闭合曲线。

**定理1(可微约旦曲线定理)** 令是一条平面,规则,闭合,简单的曲线.那么恰好具有两个连通的分量,并且是它们的公共边界.

**定理2** 令是一条平面,规则,简单的闭合曲线.则的旋转指数为(取决于的方向).

**命题1** 一个平面,规则,闭合的曲线才是凸的当且仅当其它是简单的并且曲率k不会改变符号.

**定理3(费歇尔定理)** 简单闭合曲线的总曲率,并且当且仅当曲线为平面凸曲线时,等式成立.(**证明过程前半部分看懂了,后半部分有时间再看**)

围绕这曲线的半径为的管是参数化曲面

其中和分别为的法线和副法线.很容易得到

我们假设很小,以致,其中.则是规则的,直接计算得出

因此,管的高斯曲率由下式给出

**定理4(Fary-Milnor**) 打结的简单闭合曲线的总曲率大于.(**时间关系,该定理的证明过程跳过**)

**5-8 零高斯曲率的曲面** 2020年12月1日09点20分

我们已经看到(第4-6节),高斯曲率恒等于0的规则曲面与平面局部等距.在本节中,我们将从它们在中的位置的角度看待这些表面,并证明以下全局定理.

**定理** 令为高斯曲率为零的完整曲面.那么,是圆柱或平面.

根据定义，圆柱是一个规则曲面使得对于每个点,都会通过一条唯一的线(通过的生成器),该直线满足以下条件:如果,则线和平行或相等.

我们将从研究零曲率表面的一些局部特性开始.

令为高斯曲率的规则曲面.由于,其中和是主曲率,所以的点是抛物线点或平面点.我们用表示平面点的集合,用表示的抛物点的集合.

在中是封闭的.实际上,的点满足平均曲率为零的条件.通过的连续性,的累积点的平均曲率为零;因此,它属于.因此,在S中是开集.

首先,令.由于是一个抛物点,所以处的主要方向之一是渐近方向,而处没有其他渐近方向.我们将证明通过的唯一渐近曲线是一条直线段.

**命题1** 通过曲率的表面的对位点的唯一渐近线是S中(直线)线的(开)线段.

备注.上述命题中的K≡0非常重要。 例如，旋转圆环的上平行线是由抛物线点形成的渐近曲线，它不是直线的一部分。 现在，我们将看看扩展该线段会发生什么。 以下命题表明（参见示例1）扩展线从不满足集合P； 它可以“终止”于S的边界点或无限期地停留在U中。使用以下术语很方便。 如果不是通过p的某些渐近曲线的适当子集，则通过p∈S的渐近曲线被认为是最大的。

**命题2** 令为穿过曲率面的抛物面的最大渐近线,令为的平面点集合.则.

**引理1** 设为通过曲率为零的曲面的抛物点的渐近曲线的弧长,设为沿该曲线的平均曲率.则,在中

**命题3** 令是曲率表面的曲面S的集合U的抛物点集的边界的点.然后通过穿过线的唯一开放段.此外,;即,的边界由线段形成.(**证明过程需要用到拓扑,跳过**)

**5-9 雅可比定理** 2020年12月1日10点04分

为简单起见,假定本节中的表面是完整的,并且测地线由弧长参数化.

令

并且令是的线,由下列给定

令是的可微分参数曲线,满足,且如果,则.此外,令

**引理1** 有了上面的符号,我们有

1. ,其中表示相应曲线的弧长.

另外,如果不是的临界点,,并且如果和的迹线是不同的,则

1. .

**定理1(雅各比)** 令,是没有共轭点的测地线;即在的线的点是规则的,.令是的适当变化.则

1. 如果存在一个,使得如果,

其中表示曲线的长度,其中.

1. 此外,如果的踪迹与的踪迹不同,则.

注释1.不包含共轭点的测地线γ相对于不在γ邻域内的曲线可能不是最小的。 例如，这种情况发生在圆柱体中（没有共轭点），因为读者可以通过观察圆柱体的闭合测地线轻松地进行验证。

定义1 令为的测地线,并令

是一个连续映射,且

如果存在下列分割,则称为的**突变[broken variation]**:

使得

是可微的.如果对每一个成立,则该突变称为**适当的**.

该变化的曲线ht（s），s∈[0，l]现在是分段可微分的曲线。 变分矢量场V（s）=（∂h/∂t）（s，0）是沿γ的分段可分矢量场； 也就是说，V：[0，l]→R3是一个连续的映射，在每个[ti，ti + 1]中是可微的。 如果V（s），γ（s）= 0，s∈[0，l]，则打破的变化h被认为是正交的。

以与第5-4节中的命题1完全相似的方式，有可能证明沿着γ的分段可微向量场V引起γ的突变，其变异场为V。 此外，如果

可以选择适当的变化.

类似地，函数L：（-，）→R（变化曲线的弧长）由下式定义

通过5-4节的引理1，该和的每个求和可在0附近微分。因此，如果δ足够小，则L可在（-δ，δ）中微分.

对于弧长（L（0））的第二变化，对于适当的正交断裂变化，其表达式与第5-4节的命题4中获得的表达式完全相同，可以很容易地进行验证。 因此，如果V是沿着测地线γ的分段可微分向量场：[0，l]→S

现在设γ：[0，l]→S是测地线，并用U表示与γ正交的沿γ的分段可分矢量场的集合。 也就是说，如果V∈U，则对于所有s∈[0，l]，V（s），γ（s）= 0。 观察到，通过加和乘以自然数的自然运算，U形成一个向量空间。 定义地图I：U×U→R由

立即确认我是对称双线性图； 也就是说，我在每个变量中都是线性的，并且我（V，W）= I（W，V）。 因此，我确定U的二次形式，由I（V，V）给出。 这种二次形式称为γ的索引形式.

备注2. M. Morse介绍了测地线的索引形式，他证明了以下结果。 设γ（s0）为相对于测地线γ的共轭点γ（0）= p：[0，l]→S，s0∈[0，l]。 共轭点γ（s0）的多重性是Tp（S）的最大子空间E的维数，使得每个u∈E的（d expp）γ（s0）（u）=0。二次形式的索引 Q：向量空间中的E→R是E的子空间L的最大维，使得Q（u）<0，u∈L。用这种术语，莫尔斯指数定理描述如下：令γ：[ 0，l]→S是测地线。 则γ的二次形式I的索引是有限的，它等于γ（（0，l]）中γ（0）的共轭点的数量，每个共轭点的数量都用其乘性计算。 可以在J. Milnor的“摩尔斯理论，数学研究年鉴”第51卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1963年找到。

**引理2** 设是沿着测地线的雅可比场且.则

定理2(雅各比) 如果让是的测地线,并且让是相对于共轭的点,则存在一个适当的突变和实数,使得如果,我们有.

**5-10 抽象表面;进一步一般化** 2020年12月1日10点24分——2020年12月15日10点03分

在第5-11节中,由于希尔伯特,我们将证明一个定理,该定理断言中不存在具有恒定负高斯曲率的完整规则表面.

实际上,该定理要强一些.为了理解正确的陈述和希尔伯特定理的证明,引入抽象几何表面的概念将很方便,该概念是由以下因素引起的.

到目前为止,我们已经处理过的表面是的子集S,在该子集上可微分的函数才有意义.我们在每个处定义一个切平面,并开发了围绕的微分几何作为对变化的研究.但是,我们已经观察到,固有几何的所有概念(高斯曲率,测地线,完整性等)仅取决于每个上内积的选择.如果我们能够抽象地定义(即不参考)可区分函数在其上有意义的集合,则最终可以将固有几何扩展到此类集合.

下面的定义是我们在第2章中获得的经验的产物.从历史上看,它花了很长时间才出现,这可能是由于曲面定义中的参数更改的基本作用尚未得到清楚理解这一事实.

**定义1** **抽象曲面**(维数为2的可微流形)是集合以及一系列一对一映射使得

1. .
2. 对于每对,,我们得到,是中的开放集,并且是可微映射(图5-46).

具有的对称为围绕的**参数化**(或坐标系).称为**坐标邻域**,如果,我们说是此坐标系中的**坐标**.族被称为的可微结构.

我们说如果在中对于所有都是开放的,则集合是一个开集.

从条件2可以立即得出“参数变换”

是微分同构.

将上述定义与中规则曲面的定义进行比较(第2-2节,定义1)表明,要点是要包括参数的变化定律(这是中曲面的定理,参见第2-3节,命题1)中抽象表面的定义。由于这是允许我们在中定义曲面上的微分函数的属性(第2-3节,定义1),我们可以设置

**定义2** 令和为抽象曲面.令是到的一个映射.围绕给定一个参数化,如果围绕存在另一个参数化使得和映射

在处是可微的,则是**可微分的**.如果在每个处都可微,则在上可微(图5-47).

显然，根据条件2,此定义不取决于参数设置的选择.映射(1)在参数化中称为的表达式.

因此，在抽象的表面上谈论可微函数是有意义的，并且我们已迈出了对固有几何进行泛化的第一步.

现在我们需要将切线平面与抽象曲面的每个点相关联.再次将我们的经验用于中的曲面(第2-4节)也很方便.那里的切平面是一个点处的切向量几何,点处的切向量定义为曲面上曲线在该点的速度.因此,我们必须定义抽象曲面上曲线的切线向量是什么.由于没有的支持,因此必须寻找独立于的曲线的切向量的特征.

以下考虑将激发下面给出的定义.令是中的可微曲线,其中.写下,和.令是在的附近定义的可微函数.我们可以将约束在上,并写出相对于的方向导数,如下所示:

因此,矢量方向上的方向导数是仅依赖于的微分函数的算符.这是我们要寻找的切向量的特性.

定义3 可微映射称为上的曲线.假定并且令为上在p处可微分的函数集.在处曲线的切向量为函数,定义为

在点处的**切向量**是某个曲线,在处的切向量.

围绕选择参数化,我们可以用和分别表示函数和中的曲线.因此,

这表明,给定在周围的坐标,我们用表示在处的切向量,它将函数映射到;类似的含义将附加到符号上.我们注意到可以解释为“坐标曲线”处的切向量分别为

从上面可以得出,通过函数的常规运算,位于处的切向量是二维向量空间,被称为位于处的的切空间.同样很明显,对于任意,围绕的参数化的选择确定的关联基础.

**定义4** 令和为抽象曲面,令为可微映射.对于每个和每个,考虑可微曲线,其中.令.由给出的映射是定义明确的线性映射,称为在处的微分.

**定义5** 几何表面(维数为2的黎曼流形)是具有在处内积选择的抽象表面,它在以下意义上随的不同而变化.对于某些(因此也所有) 围绕的参数化,函数

是中的可微函数.内积,通常称为上的(黎曼)度量.

**定义6** 如果微分dϕp：Tp（S）→Tp（R3）是内射的，则抽象曲面S到R3的可微映射ϕ：S→R3是沉浸式的。 此外，如果S具有指标，并且

said被称为等距浸没.

现在注意T m，n是R2的等轴测图，并按如下方式在T上引入了几何（黎曼）结构。 设p∈T和v∈Tp（T）。 设q1，q2∈R2和w1，w2∈R2使得π（q1）=π（q2）= p且dπq1（w1）=dπq2（w2）= v。 因此，存在Tm，n使得T m，n（q1）= q2，d（Tm，n）q1（w1）= w2。 由于Tm，n是等轴测图，因此| w1 | = | w2 |。 现在，通过| v |在Tp（T）中定义v的长度。 = |dπq（w1）| = | w1 |。 通过我们所看到的。 这是很好的定义。 显然，这会在每个p∈T的Tp（T）上产生一个内积p。 由于这本质上是R2的内积，并且π是局部微晶，p随p的不同而变化。

观察到在族{Uα，π◦iα}的任何参数化中T的第一基本形式的系数为E = G = 1，F =0。因此，该环面的局部行为像欧几里德空间。 例如，其高斯曲率等于零（参见练习1，第4-3节）。 这说明了扁平圆环的名称，通常将其与刚刚描述的内积一起赋予T.

定义7.令S为抽象表面。 如果ϕ是一个浸入式和同胚性，则可微分图ϕ：S→Rn是一个嵌入.

例如，R3中的规则表面可以通过嵌入ϕ来表征为抽象表面S的图像：S→R3。 这意味着在我们以前对R3中的常规曲面的研究中，只能检测到那些可以嵌入R3中的抽象曲面。 通过以下示例可以看出这是一个严重的限制.

定义1a。 尺寸为n的可微流形是集合M和一族的一对一映射xα：Uα→M的开放集合Uα⊂Rn变成M

对于每对具有xα（Uα）∩xβ（Uβ）= W =φ的α，β，我们有x-1α（W），xβ-1（W）是Rn中的开放集，而xβ-1◦ xα，xα−1◦xβ是可微映射。

{Uα，xα}族相对于条件1和2最大.

满足条件1和2的族{Uα，xα}称为M上的可微结构。给定M上的可微结构，我们可以通过将所有可能的参数化加上M的一些参数化，轻松地将其完整化为一个最大的结构。 族{Uα，xα}，满足条件2。因此，由于某种语言的滥用，我们可以说可微流形是具有可微结构的集合。

备注。 可以通过以下要求在M中定义一个开放集族：如果对于每个α，xα-1（V∩xα（Uα））是Rn中的一个开放集，则V⊂M是一个开放集。 拥有点集拓扑知识的读者会注意到，这样的族定义了M上的自然拓扑。在这种拓扑中，映射xα是连续的，集合xα（Uα）在M中是开放的。在流形上的一些更深的定理中， 有必要对M的自然拓扑施加一些条件.

可微导图和切向量的定义逐字传递到可微流形。 当然，切线空间现在是n维向量空间。 差异性和可定向性的定义也直接扩展到当前情况。 在下面的示例中，我们将显示二维流形上的问题如何自然地导致对高维流形的考虑.

令{Uα，xα}为S的可微结构.我们将以（uα，vα）表示Uα的坐标,并以{∂/∂uα，∂/∂vα}表示xα（ Uα）.对于每个α,定义一个映射yα：Uα×R2→T（S）

在几何上，这意味着我们将以{∂/∂uα，∂/∂vα}为基础的p的uα，vα加上w的坐标作为点（p，w）∈T（S）的坐标.

我们将证明{Uα×R2，yα}是T（S）的可微结构。 由于“αxα（Uα）= S且（dxα）q（R2）=Txα（q）（S），所以q∈Uα,

并验证定义1a的条件1。 现在令

由于x−1β◦xα是可微的，因此d（xβ-1◦xα）也可微。 由此得出yβ−1◦yα是可微的，并验证了定义1a的条件2。

S的切线束是在处理S上的二阶微分方程时要处理的自然空间。例如，可以将几何表面S上的测地线方程写在坐标邻域中，如（ 4-7）

引入新变量x = u，y = v以将上述变量简化为一阶系统的经典“技巧”

可以解释为考虑到具有坐标（u，v，x，y）的切线束T（S），并且将测地线视为由（4）在T（S）中局部给出的矢量场的轨迹。 可以证明，这样的向量场在整个T（S）中定义得很好。 也就是说，在两个坐标邻域的相交处，由（4）给出的矢量场是一致的。 该场（或更确切地说，其轨迹）称为T（S）上的测地流。 研究S上测地线的全局属性时，这是一个很自然的对象。

回顾第4-7节，将会注意到我们以变相的形式使用了歧管T（S）。 因为我们只对本地属性感兴趣，所以我们可以与坐标邻域相处（本质上是R4的开放集）。 但是，当考虑到切线束的概念时，即使是这种局部工作也变得更加整洁。

定义5a。 黎曼流形是一个n维可微流形M，对于每个p∈M，可以选择一个内部乘积Tp（M）中的p，它在以下意义上随p发生微分变化。 对于某些（因此，所有）参数化xα：Uα→M，p∈xα（Uα），函数

在xα-1（p）处可微; 这里（u1，...，un）是Uα⊂Rn的坐标.

可微族{p，p∈M}被称为M的黎曼结构（或黎曼度量）。

请注意，在曲面的情况下，我们使用了传统符号g11 = E，g12 = g21 = F，g22 =G。

固有几何概念到黎曼流形的扩展并不像可微流形那样简单。

首先，我们必须为黎曼流形定义协变导数的概念。 为此，令x：U→M为具有坐标（u1，...，un）的参数化，并设置xi =∂/∂ui。 因此，gij = xi，xj。

我们要定义向量场v相对于向量场w的协变导数D wv。 我们希望D wv具有过去所熟悉的属性，并且已经证明它们在过去是有效的。 首先，它应该具有旧协变导数的分布特性。 因此，如果u，v，w是M上的向量场，而f，g是M上的可微函数，我们想要

例如，∂f/∂u是一个函数，其在p∈M处的值是f对曲线α的限制的导数（f◦α）（0）：（-，）→M， α（0）= p，α（0）= u。

等式（5）和（6）表明，一旦我们在基向量上知道协方差D的值，就完全确定了协方差D

其中系数kij arc函数尚未确定。

其次，我们希望ij k在i和j中对称（ij k = ji k）； 那是，

第三，我们希望产品的法则能够成立。 那是，

从等式（7）和（8），得出

或者，等效地，

由于det（gij）= 0，我们可以求解最后一个系统，并获得ij k作为黎曼度量gij及其导数的函数（读者应将上面的系统与第4节的系统（2）进行比较）。 3）。 如果我们将gij视为矩阵并将其逆写为gij，则上述系统的解为

因此，给定M的黎曼结构，在M上存在一个唯一的满足方程（5）–（8）的协变导数（也称为给定黎曼结构的Levi-Civita连接）.

从协变导数开始，我们可以定义平行传输，测地线，测地曲率，指数图，完整性等。

这些定义与我们之前给出的定义完全相同。但是，曲率的概念需要更多的阐述。由于黎曼，以下概念可能是高斯曲率的黎曼几何中最好的类似物。令p∈M且σ⊂Tp（M）是切线空间Tp（M）的二维子空间。考虑所有从p开始并与σ相切的M测地线。从指数图在Tp（M）的原点是局部微分的事实出发，可以证明这种测地线的小片段构成了包含p的抽象表面S。 S具有由M的黎曼结构引起的自然几何结构。S在p处的高斯曲率称为M在p处沿σ的截面曲率K（p，σ）。可以根据Levi-Civita连接形式来确定截面曲率，但这在技术上无法在此处描述。我们将仅提及本章中的大多数定理可以作为黎曼几何中的自然问题提出。其中一些是正确的，对给定的证据进行了很少或没有修改。 （Hopf-Rinow定理，Bonnet定理，第一个Hadamard定理和Jacobi定理都属于此类。）但是，另一些定理还需要进一步的假设才能成立（例如第二个Hadamard定理）并且是种子。进一步发展。上述思想的全面发展将使我们进入黎曼几何的领域。我们必须到此为止，并请读者参阅书末的参考书目。

5-11 希尔伯特定理 2020年12月1日11点39分

定理。 具有恒定负曲率的完整几何表面S不能等距浸入R3中。

我们将从一些观察开始。 通过将内积乘以恒定因子，我们可以假设曲率K≡-1。 此外，由于expp：Tp（S）→S是局部微同态（第5-5节定理的推论），因此它会在Tp（S）中产生内积。 用S表示具有该内积的几何表面T p（S）。 如果ψ：S→R3是等距浸入式，则对于ϕ =ψ◦expp：S→R3同样成立。 因此，我们简化为证明平面S上不存在等距浸没ϕ：S-R3的内积为K≡-1。

LEMMA 1. S的面积是无限的。

对于本节的其余部分，我们将假设存在等距浸入ϕ：S→R3，其中S是与平面同胚的几何表面，且K≡-1。

为了避免可能与ϕ（S）的自相交带来的困难，我们将使用S并使用浸入ϕ在S上诱导induce（S）⊂R3的局部外在几何形状。 更准确地说，由于ϕ是一个浸入式，因此对于每个p∈S，都存在一个p的邻域V⊂S，使得约束ϕ | V =〜ϕ是一个微分态。 在每个ϕ（q）〜∈〜（V），例如存在两个渐近方向。 通过ϕ〜，这些方向在q∈S处感应出两个方向，这将称为q处S上的渐近方向。 这样，谈论S上的渐近曲线是有意义的，并且可以将相同的过程应用于ϕ（S）的任何其他局部实体。

LEMMA2。对于每个p∈S，都有一个参数化x：U⊂R2→S，p∈x（U），使得x的坐标曲线为x（U）= V的渐近曲线，其形式为 Tchebyshef网（我们将通过说V的渐近曲线形成Tchebyshef网来表达这一点）。

LEMMA 3.令V⊂S是S的坐标邻域，使得坐标曲线是V中的渐近曲线。 然后，由坐标曲线形成的任何四边形的面积A都小于2π。

LEMMA 4.对于固定的t，曲线x（s，t），-∞<s <∞是一条以s为弧长的渐近曲线。

LEMMA 5. x是局部微分。