5-2 球体的刚度 2020年7月7日09点53分

定理1 令S为具有恒定高斯曲率的紧致规则曲面.则S一定为球体.(**证明过程需要理解**)

引理1 令S为规则曲面,为满足以下条件的S点:

1. ;也就是说,中的高斯曲率是正的.
2. 同时是函数的局部最大值点和函数的局部最小值点.

那么是S的脐点.

引理2 一个规则紧致曲面至少有一个椭圆点.

定理1a 令S为规则的,紧致且连通的曲面,并且高斯曲率以及平均曲率恒定.那么S是一个球体.

定理1b 令S为规则的,紧致且连通的表面,并且高斯曲率为正,如果在S中存在关系,其中是的递减函数,,则S是一个球体.

高斯曲率的中的紧密连接表面称为椭圆形.因此,定理1a可以表示如下:具有恒定平均曲率的椭圆形是一个球体.

5-3 完整表面.霍普夫-里诺定理 2020年7月8日09点49分

除非另有说明,否则从现在开始要考虑的所有表面将是规则的并已连接.

定义1 如果存在规则的(连接)表面,使得作为适当的子集,则称规则(连接)表面S是可扩展的.如果不存在这样的,则称S是不可扩展的.

定义2 对于每个点,S上的任意参数化测地线γ：[0，）→S从p =γ（0）开始可以扩展到在R上定义的参数化测地线γ〜时,规则表面S被认为是完整的.

稍后我们将证明(命题1)每个完整的曲面都是不可扩展的,并且存在不完整的不可扩展曲面(示例1).因此,完整性的假设比不可扩展的假设更强.此外,我们将证明(命题5)中的每个闭合表面都是完整的.也就是说,完整性的假设比紧凑性的假设要弱.

本部分的目的是证明给定完整表面S的两个点p，q∈S，存在一个与p最小的测地线（即长度小于或等于任何其他曲线的长度） 将p连接到q）。 这一基本结果首先由霍普夫和里诺（H. Hopf，W. Rinow，“Überden Begriff dervollständigendiffereogeometriscbenFlächen”，Comm。Math。Helv。3（1931），209-225）证明.这个定理是为什么完整的曲面比不可扩展的曲面更适合微分几何的主要原因.

现在让我们来看一些示例.该平面显然是完整的表面.圆锥减去顶点是不完整的曲面,因为通过充分扩展生成器(测地线),我们可以到达不属于曲面的顶点.球是完整的曲面,因为可以为每个实际值定义其参数化的测地线(其迹线是球的大圆).圆柱体也是完整的曲面，因为其测地线是为所有实数值定义的圆，线和螺旋.

另一方面,通过从完整表面S去除点p而获得的表面S-{p}是不完整的.实际上,S的测地线γ应该通过p. 通过取点q,在γ上的p附近（图5-3），存在一个参数化的测地线S-{p}，它从q开始，不能扩展到p(此论据将在命题1中详细给出).因此，减去点的球体和减去点的圆柱体都不是完整的曲面.

命题1 完整的表面S是不可扩展的.

对于以下内容,可以方便地引入S的两个点之间的距离的概念,该距离仅取决于S的固有几何形状,而不取决于S浸入R3的方式(参见命题2,第4-2节).观察到,由于S⊂R3,可以将S两点之间的距离定义为R3中这两点之间的距离.但是,该距离取决于第二种基本形式,因此,对于本章而言,该距离是不合适的.

一个连续映射将直线R的闭区间映射到曲面S,且连接,该映射被称为的参数化,分段可微分曲线仅当在区间上存在点分割使得在上可微的.的长度被定义为

命题2 给定规则(连接)曲面S的两个点,存在连接的参数化分段微分曲线.

现在让是规则曲面S的两个点.我们用表示参数化的分段可微分曲线,将p连接到q，并用表示其长度.命题2表明所有这些的集合都不为空.因此,我们可以设置以下内容:

定义3 从点到点的(固有)距离为

其中表示在所有将p连到q的分段微分曲线上取值.

命题3 上面定义的距离具有以下属性,

1. ,
2. ,
3. ,
4. 当且仅当,

其中是S上任意点.

推论 .

这足以观察到

因此,

命题4 设为S的一个点,则由给出的函数在S上是连续的.

命题5 闭合曲面是完整的.

推论 紧凑曲面是完整的.

定理1 令S为完整表面.给定两个点,存在一个最小测地线连接p和q.

推论1 令S为完整表面.则对于每个点p∈S映射在S上.

推论2 令S为完整表面且以度量d为界（即，存在r> 0使得每对p，q∈S d（p，q）<r）。 那么S是紧凑的.

初次学习得分:1分

5-4 弧长的第一和第二变化: 邦内定理 2020年7月14日10点00分

本部分的目的是证明高斯曲率的完整表面S是紧密的(Bonnet定理).

证明的关键点在于,如果K≥δ> 0，则连接两个任意点p，q∈S且长度l（γ）>π/√δ的测地线γ不再最小； 也就是说，存在一条连接p和q的参数化曲线，其长度小于l（γ）。

一旦证明，则每个最小测地线的长度l≤π/√δ； 因此，S以距离d为界。 由于S是完整的，因此S是紧凑的（推论2，第5-3节）。 我们注意到，此外，我们获得了S直径的估计值，即ρ（S）≤π/√δ。

为了证明上述观点，我们需要将参数化曲线的弧长与“相邻曲线”的弧长进行比较.为此，我们将介绍一些对其他微分几何问题有用的想法。 实际上，这些想法是对微分学中发现的更一般概念的微分几何目的的适应。 不会假设有微积分的知识.

定义1 令为规则参数化曲线,其中参数为圆弧长度.的变化是可微映射使得

对于每个,由定义的曲线称变化为的曲线.如果变化被认为是适当的仅当

采用以下表示法很方便.中的参数化曲线由

给出并穿过点并在具有和作为切向量.设是可微映射,设.则是曲线在处的切向量,而是曲线在的切向量.我们将表示

我们回顾(参见第4-4节,定义3)沿着曲线的向量场是对应于为每一个赋予曲面S在的切向量.因此,和是沿着的可微切向量场.

因此,的变化决定了沿的可微向量场

V称为h的变分矢量场;我们指出如果h合适,则

命题1 令是沿着参数化规则曲线的可微向量场,则存在的变化使得是的变分矢量场.此外,如果,则可以适当选择.

我们要比较弧长和,我们定义一个函数

引理1 由等式定义的函数在t = 0附近是可微的;在这样的邻域中,L的导数可以通过积分符号下的微分获得.即

引理2 令为沿参数化曲线的可微向量场,令为可微分函数.则

引理3 令和为沿着参数化曲线的可微向量场.则

引理4 令是可微映射.则

命题2 令是曲线的适当变化,令是的变分矢量场,则

其中.

命题3 规则参数曲线(其中参数是的弧长)是一个测地线当且仅当对于每一个适当变化,均使得.

引理5 令是规则曲面上点的参数化,参数为,并且为的高斯曲率.则

引理6 令是一个可微映射并且令是沿着的可微分向量场.则

其中是S在点的曲率.

命题4 令是测地线(其中参数是的弧长)的适当正交变化. 令是的变分矢量场.则

其中是S在点的曲率.

定理1(邦尼) 令完整曲面S的高斯曲率满足条件

那么S是紧致的并且S的直径满足不等式

本节内容初学评分:1分

5-5 雅可比场和共轭点 2020年7月15日09点47分

在本节中，我们将探讨用于证明Bonnet定理的变分技术的一些细节.

我们感兴趣的是获得关于给定测地线γ附近的测地线行为的信息.进行的自然方法是考虑满足进一步条件的γ变化，该变化的曲线本身就是测地线.这种变化的变化场给出了测地线在γ附近的分布密度的想法.

定义1 设是上的参数化测地线,设是的变体,使得对于每个曲线,是参数化的测地线(不一定通过弧长参数化).沿的变化场称为雅可比场.

命题1 令为沿的雅可比场.则满足所谓的雅可比方程

其中是在处的高斯曲率.

引理1 令并选择,其中.设为的测地线,由

给出.则沿着给出的向量场

是一个雅可比场.此外,.

命题2 令为沿的可微向量场,满足雅可比方程(1),且,则是沿的雅可比场.

定义2 设是S的测地线，.如果存在一个沿着的雅可比场,但是沿整个并不全为0,则我们称点相对于测地线与共轭.

命题3 令和是沿着的雅可比场.则

命题4 令是沿着的雅可比场,且

则

推论 令是沿着的雅可比场,且.则.

命题5 令是S上的两个点,并且令是连接和的测地线.则是相对于于p共轭当且仅当是的关键点.

定理1 假设曲面S的高斯曲率K满足条件K≤0.那么,对于每个p∈S，p的共轭轨迹为空。 简而言之，曲率K≤0的表面没有共轭点.

推论 假设S的高斯曲率K为负或零.然后对于每个p∈S,映射是一个局部微分同构.

引理2(高斯) 令为(完整)曲面S的点,令和.则

其中应用了.

本节内容初学评分:1分